

# 基于 Mathematica 的三电荷系统研究

姓名：曹宸瑞 学号：PB21020659 班级：21 级物理学院 4 班 日期：2022-06-04

## 摘要

本文从库伦定律和真空中共线三点电荷的静止平衡出发，利用 Mathematica 软件尝试探究真空中三个点电荷的一种动态平衡方式及初始位置与其运动周期的关系。

## 关键词

库伦定律 电荷动态平衡

## 1 引言

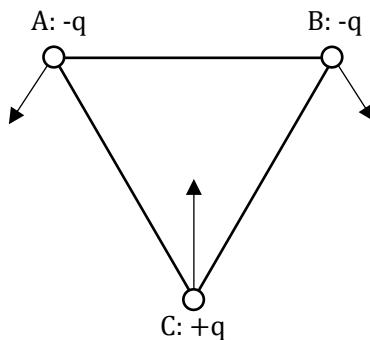
真空中若存在共线的平衡三点电荷，可以解得：

I 两端电荷电性相同，与中间电荷电性相反；

II 两端电荷带电量小，中间电荷带电量小；

III 两端电荷中，离中间电荷远的电荷带电量小，近的电荷带电量小。

若三个点电荷不共线时，能否达到另一种动态平衡呢？初步分析可知，点电荷分布在正三角形的三个顶点处时，负电荷受到背离另一负电荷方向的水平分力，故负电荷间距离会逐渐变大；正电荷与负电荷中心距离逐渐减小，排斥力逐渐减小，而吸引力在一段时间内会增大；故若吸引力水平分量大于排斥力水平分量，负电荷所受合力的水平分量指向另一负电荷，则负电荷间距离又会逐渐变小。而正电荷始终受到指向负电荷中心的变力，会作类似简谐运动的上下振动。这样看来，三个电荷是有可能达到动态平衡的，且可能具有一定周期。下面本文将借助 Mathematica 分析三电荷的运动轨迹。



图表 1 正三角形电荷分布及受力示意图

## 2 正文

### 2.1 理论分析

分析可知，只要三电荷构成等腰三角形且正电荷在顶点处，正电荷所受垂直分力大小就始终等于负电荷所受垂直分力大小的两倍，故运动轨迹一定围绕等腰三角形的中心（三条中线交点）运动。将坐标系定在等腰三角形的中心处，则可知在整个运动过程中， $x_a = -x_b$ ， $y_c = -2y_a = -2y_b$ ，这将有助于我们后续利用 Mathematica 解答运动问题。

设各电荷带电量大小为  $q$ ，B 电荷坐标为  $(x, y)$ ，则 A 电荷坐标为  $(-x, y)$ ，C 电荷坐标为  $(0, -2y)$ ， $x, y > 0$ 。

可求得总能量为：

$$W_0 = -\frac{2kq^2}{\sqrt{(x^2 + 9y^2)}} + \frac{kq^2}{2x}$$

由牛顿第二定律可得：

$$a_x = \frac{-\frac{\sin\alpha}{(x^2 + 9y^2)^2} + \frac{1}{4x^2}}{m}, \quad \sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 9y^2)}}$$

$$a_y = -\frac{\frac{3y}{(x^2 + 9y^2)^2}}{m}$$

由这些方程即可以解出 B 电荷坐标随时间的变化函数。

## 2.2 编程与实现

令

$$\frac{W_0}{kq^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

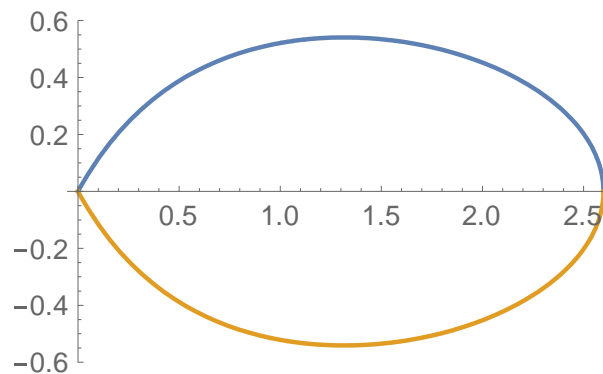
三电荷满足能量守恒定律，故  $E_k + E_p \leq W_0$ 。

利用 Mathematica 解方程

$$-\frac{2}{\sqrt{x^2 + 9y^2}} + \frac{1}{2x} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (x > 0)$$

解得

$$0 < x \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, y = \pm \sqrt{\frac{135x^2 - 12\sqrt{3}x^3 - 12x^4}{81 + 108\sqrt{3}x + 108x^2}}$$



图表 2 B 电荷运动边界

这是动能为 0 的一条曲线，B 电荷所有运动轨迹理应在曲线内。B 电荷的初始位置位于此边界上。

接下来借助 Mathematica 计算三电荷运动轨迹。

解微分方程

$$x''[t] = -\frac{x[t]}{(x[t]^2 + 9y[t]^2)^{3/2}} + \frac{1}{4x[t]^2}$$

$$y''[t] = -\frac{3y[t]}{(x[t]^2 + 9y[t]^2)^{3/2}}$$

初始条件

$$x'[0] = 0, y'[0] = 0, x[0] = x_0, y[0] = y_0$$

其中 $x_0$ 与 $y_0$ 为 B 电荷初始位置且是边界上的一点。微分方程的解即为 B 电荷位置随时间变化的函数，同时也可以得到 A, C 电荷位置随时间变化的函数。将不同时间的三电荷位置同时显示在平面直角坐标系中，可以得到三电荷的运动轨迹（图中略去 C 电荷轨迹）。

接下来我们使用 $\theta = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$ 表示 B 电荷的初始位置。

## 2.3 数据处理

### 2.3.1 微分方程解的原始数据（以 $2.1^\circ$ 与 $30^\circ$ 为例）

表格 1 初始位置为  $2.1^\circ$  时 B 电荷坐标与时间的关系（前 10/500 项，按  $\Delta x^2 + \Delta y^2$  升序排序）

时间* 10/s	x坐标	y坐标	$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta x^2 + \Delta y^2$
1	2.577305	0.094505	0	0	0
2	2.576754	0.094424	0.000551	8.13E-05	3.10463E-07
217	2.57829	0.094443	-0.00099	6.21E-05	9.745E-07
111	2.578281	0.094214	-0.00098	0.000291	1.03795E-06
105	2.577227	0.093486	7.78E-05	0.00102	1.04591E-06
213	2.576552	0.093499	0.000753	0.001007	1.57971E-06
322	2.5761	0.093984	0.001204	0.000522	1.72307E-06
323	2.576019	0.094204	0.001285	0.000301	1.74287E-06
218	2.575972	0.094274	0.001333	0.000231	1.82954E-06
214	2.578638	0.093978	-0.00133	0.000528	2.05589E-06

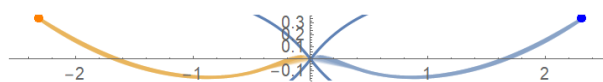
初始位置为  $2.1^\circ$  时，取周期为 10.8s。

表格 2 初始位置为  $30^\circ$  时 B 电荷坐标与时间的关系（前 10/500 项，按  $\Delta x^2 + \Delta y^2$  升序排序）

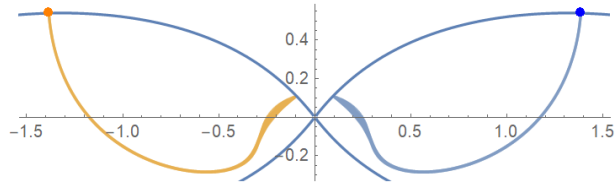
时间* 10/s	x坐标	y坐标	$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta x^2 + \Delta y^2$
1	0.866025	0.5	0	0	0
784	0.865943	0.499955	8.29E-05	4.55E-05	8.93E-09
1959	0.865925	0.499858	9.99E-05	0.000142	3.02E-08
1176	0.866165	0.499836	-0.00014	0.000164	4.64E-08
393	0.866251	0.499728	-0.00023	0.000272	1.25E-07
1567	0.865698	0.499821	0.000327	0.000179	1.39E-07
392	0.866173	0.499527	-0.00015	0.000473	2.45E-07
2742	0.86552	0.499792	0.000505	0.000208	2.98E-07
3134	0.866195	0.499437	-0.00017	0.000563	3.45E-07
3917	0.865629	0.499438	0.000396	0.000562	4.72E-07

初始位置为  $30^\circ$  时，取周期为 39.3s。

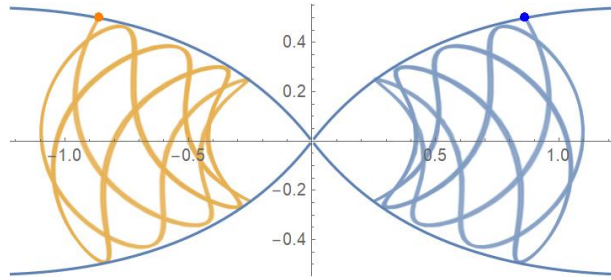
### 2.3.2 利用 Mathematica 作出散点图（以具有规则路径的为例）



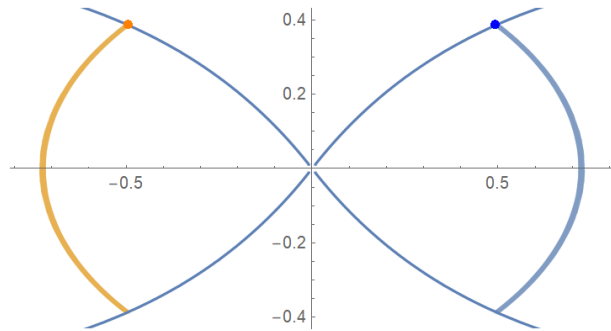
图表 3 初始位置为  $8.3^\circ$  时 A, B 电荷运动轨迹



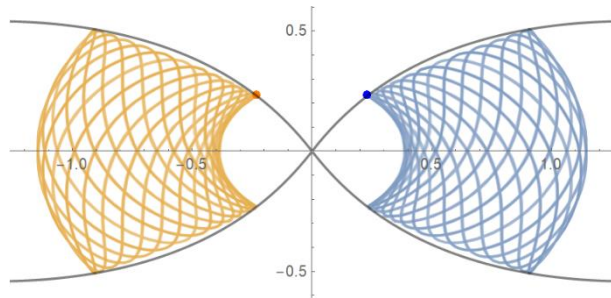
图表 4 初始位置为  $21.3^\circ$  时 A, B 电荷运动轨迹



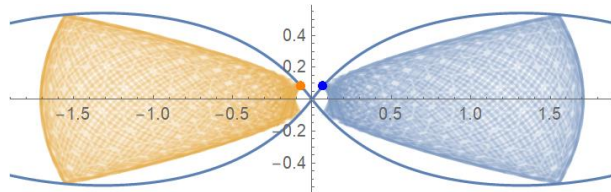
图表 5 初始位置为  $30.04^\circ$  时 A, B 电荷运动轨迹



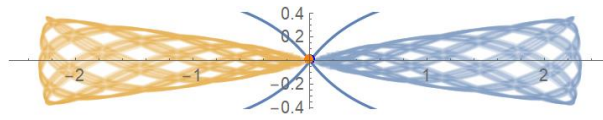
图表 6 初始位置为  $38^\circ$  时 A, B 电荷运动轨迹



图表 7 初始位置为  $45^\circ$  时 A, B 电荷运动轨迹



图表 8 初始位置为  $50^\circ$  时 A, B 电荷运动轨迹



图表 9 初始位置为 52°时 A, B 电荷运动轨迹

更多图像、数据及源代码请见：<http://home.ustc.edu.cn/~caochenrui/2022/05/23/mathematica/>

表格 3 初始角度与周期的关系（以到初始位置距离最小的前 100 项中最小时间计）

初始角/°	2.1	5	10	15	20	25	30	35	40	45	52
周期 1/s	11.1	31.2	39.4	28.3	80.2	73.6	39.3	30.6	30.6	8.3	10.1
周期 2/s		73.5	90.5	64.8	208.3	82.5				31.2	
周期和/s	11.1	104.7	129.9	93.1	288.5	156.1	39.3	30.6	30.6	39.5	10.1

## 2.4 数据分析与讨论

- 2.4.1 周期 1 总体上呈现中间凸的形状，即 20-25°附近周期最长，2°与 50°两侧周期 1 最短；
- 2.4.2 有些初始角度的电荷运动轨迹周期并不是单一的，最接近初始位置的时间是两个周期的叠加，即设两个周期分别为  $T_1, T_2$ ，则在  $m(T_1 + T_2)$  ( $m$  为正整数) 时，会靠近初始位置；
- 2.4.3 第二周期、周期的和与初始角度没有显著规律，但总体上仍然是 20-25°附近周期最长；
- 2.4.4 在某些角度时，电荷运动轨迹十分规律，轨迹有一定路线甚至做往复运动，如 49.1°，45°，38°，30.04°，21.3°，15°，11°，8.3°，1.5°，其中有三个角是 15°的倍角，剩余角度没有显著规律；
- 2.4.5 初始位置大于 52.2°或小于 1.5°时，程序无法解出微分方程的解，可能是精度要求过高或者三电荷相撞导致。初步分析初始位置大于 52.2°时，预计与等势线交点过于靠近原点，导致精度要求过高；初始位置小于 1.5°时，三电荷近似共线，故电荷会直接相撞，而不做动态的周期性运动。

## 3 结论与展望

- 3.1.1 本文使用编程模拟的方法初步探究了真空中三电荷系统的运动周期与初始位置的关系，并没有发现两者有定量的规律。这样的思想可以运用于其他电荷间问题的求解。
- 3.1.2 使用 Mathematica 求解微分方程的结果中，B 电荷的横坐标在某些角度下会出现负值，这意味着 A、B 电荷必然有一瞬间会相撞，本程序并未考虑这种交换速度的情况。但实际上，A、B 互相穿过应该不会导致结果的较大差异。
- 3.1.3 较难判断准确的周期，例如 50°时，在时间足够长的情况下，运动轨迹甚至可以遍及整个包络线内，这导致无法确切地确定周期。同时，如果能够将时间取到足够长，也许可以使得电荷运动轨迹完全重合，并且不会出现表中的两个不同周期。
- 3.1.4 这类电荷运动，尤其是往复运动的一部分，也许可以运用于束缚带电粒子。

## 4 参考文献

胡友秋，程福臻，叶邦角，刘之景等. 电磁学与电动力学（上册）（第二版）[M]. 北京：科学出版社，2014.